Apellido: .... Nombre: .... Legajo:..........................

2do Parcial - **MATEMÁTICA SUPERIOR** - 23/11/2017

Tema 47

1 a	1 b	2 a	2 b	3 a	3 b	4	5	6 a	6 b	c	Notal Final
0.5 p	1.5 p	1 p	0.5 p	1 p	0.5 p	1 p	1.5 p	1 p	1 p	0.5 p	

SE APRUEBA CON 6 PUNTOS. TIEMPO DISPONIBLE: 2 HORAS

Ej. n° 1: Sea: $f(x) = 0{,}2 \bullet e^x - x^2 - 4x$

a) Halle la cantidad suficiente de iteraciones por Bisección para asegurar un error de 0,0001 partiendo de un intervalo de longitud 0,3.

b) Obtenga la mayor raíz real por Newton-Raphson con error menor que 0,001 .

Ej. n° 2: Dados los siguientes pares ordenados de datos:

x	-2	-1	1	3	4	6
y	28	8	-2	48	103	288

a) Indique el grado del polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos dados.

b) Estime la derivada primera en x=2 y x=6 y la derivada segunda en x=1.

Ej. n° 3: Dada la integral $I = \int_0^2 x^2 e^x \, dx$

a) Halle la menor cantidad de subintervalos para asegurar que al resolverla por Trapecios, se pueda asegurar que el error sea menor que 0,1

b) Indique (justificadamente) con cual de los siguientes valores de h se puede resolver por Trapecios pero no por Simpson: h=0,16 , h=0,08 , h=0,05

Ej. n° 4: Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -2x + 5y + z = 11 \\ 2x + 3y - 7z = -13 \\ 6x - y + 4z = 16 \end{cases}$

Escriba la matriz del sistema e indique si es diagonal dominante. Si no lo es, permute filas. Indique las fórmulas iterativas a utilizar para resolverlo por Gauss-Seidel.

Ej. n° 5: Aproxime la función: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en [1,2] por una recta de mínimos cuadrados.

Ej. n° 6: Complete:

a) La fórmula: $w_{i+1} = w_{i-3} + \dfrac{4}{3}h\,[2f(t_i; w_i) - f(t_{i-1}; w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}; w_{i-2})]$, corresponde a un método

de .... pasos pues ....,

y es una fórmula (Explícita / Implícita) pues ....

b) Los metodos de Runge-Kutta son..

y tienen como principal ventaja ....

RESPUESTAS TEMA 47

Ej. 1)

a) n=12 cantidad de iteraciones suficientes

b) Por Newton Raphson, la mayor raiz real es la del intervalo [5;6]

	f	f'
6	20,685758699	64,685758699
5,6802115471	3,6166324081	43,241858722
5,5965742448	0,1923753009	38,707167069
5,5916042273	0,0006398953	38,449886184
5,5915875849	7,150295E-09	38,449026897

Ejercicio 2: **a)** Haciendo las diferencias divididas se anulan en el orden 4.

-2	28					
-1	8	-20				
1	-2	-5	5			
3	48	25	7,5	0,5		
4	103	55	10	0,5	0	
6	288	92,5	12,5	0,5	0	0

Entonces es de grado 3

b) f'(2) = 25 central, f'(6)=92,5 regresiva, f''(1)=15 central

Ejercicio 3: a) f''(2) = 103,446785 h<0,07615 entonces n=32 h=0,0625

b) Con h=0,16 queda n=12,5 no se puede por ninguno
Con h=0,08 queda n=25 se puede por Trapecios pero no por Simpson
Con h=0,05 queda n=40 se puede por los dos.

Ejercicio 4:
La matriz dada NO es diagonal dominante, pero se pueden intercambiar filas

Ejercicio 5:

Por sistema de ecuaciones:

1	1,5	0,5
1,5	2,33333333	0,69314718

X ? ?

$\Rightarrow a_0 = 1,52335075 \wedge a_1 = -0,68223383$

$\Rightarrow p(x) = 1,52335075 - 0,68223383\ x$

Ejercicio 6:

23-11-17

① Sea $f(x) = 0{,}2\,e^{x} - x^{2} - 4x$

a) Halle la cantidad suficiente de iteraciones por Bisección para asegurar un error de 0,0001 partiendo de un intervalo de longitud 0,3

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2^m} = \frac{0{,}3}{2^m} < 10^{-4} \rightarrow 0{,}3 \cdot 10^{4} < 2^m \rightarrow \log(3000) < \underbrace{\log(2^m)}_{m\log(2)}$$

$$\rightarrow \frac{\log(3000)}{\log(2)} < m \rightarrow m > 11{,}55 \rightarrow \boxed{m = 12}$$

b) Obtenga la mayor raíz real por Newton-Raphson con error menor que 0,001

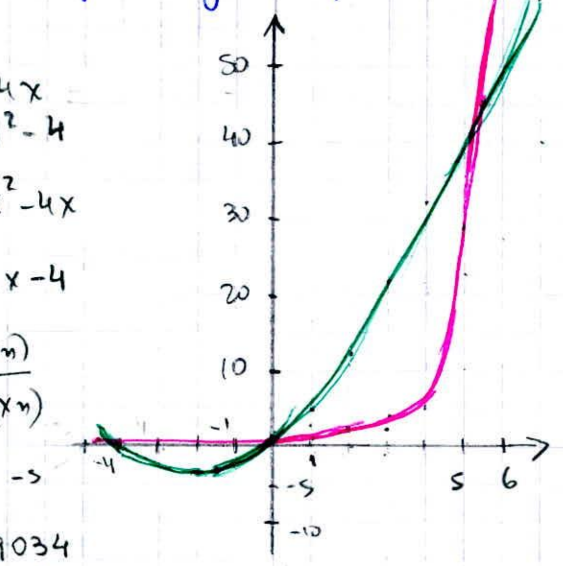
$0{,}2e^{x} = x^2 + 4x$

$0{,}2e^{x} = (x+2)^2 - 4$

$f(x) = 0{,}2e^{x} - x^2 - 4x$

$f'(x) = 0{,}2e^{x} - 2x - 4$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



tiene 3 raíces:

1 en $x \in [-5;-4]$

1 en $x \in [0;1]$

$\boxed{1 \text{ en } x \in [5;6]}$ es la mayor

$x_0 = 5$

$x_1 = 5{,}976709034$

$x_2 = 5{,}671334925$

$x_3 = 5{,}595647432$

$x_4 = 5{,}591598622$

$x_5 = 5{,}591587585$ $\Big\}\ \varepsilon < 10^{-4}$

$\boxed{x = 5{,}591587585}$ ✓

---

② Dados los sig. pares ordenados de datos:

x	-2	-1	1	3	4	6
y	28	8	-2	48	103	288

a) Indique el grado del polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos dados

x	F(x)	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$		
-2	28					
		-20				
-1	8		$\frac{15}{3} = 5$			
		$\frac{-10}{2} = -5$		$\frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$		
1	-2		$\frac{30}{4} = 7{,}5$		0	
		$\frac{50}{2} = 25$		$\frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$		es de grado 3
3	48		$\frac{30}{3} = 10$		0	
		55		$\frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$		
4	103		$\frac{37{,}5}{3} = 12{,}5$			
		$\frac{185}{2} = 92{,}5$				
6	288					

b) Estime la derivada primera en $x=2$ y $x=6$ y la derivada segunda en $x=1$

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \overset{x_i=2}{=} \frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{48-(-2)}{2} = \boxed{25 = f'(2)}$$ central

$x=6$ es el borde derecho

$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \rightarrow f'(6) = \frac{f(6) - f(4)}{2} = \frac{288-103}{2} = \boxed{92{,}5 = f'(6)}$$ Regresiva

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \rightarrow f''(1) = \frac{f(3) - 2f(1) + f(-1)}{2^2} = \frac{48 - 2\times(-2) + 8}{4} = \boxed{15 = f''(1)}$$

---

(3) Dada la integral $I = \int_0^2 x^2 e^x \, dx$

a) Halle la menor cantidad de subintervalos para asegurar que al resolverla por Trapecios se pueda asegurar que el error sea menor que 0,1

$a=0$; $b=2$. $|E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''\varphi| = \frac{1}{6} h^2 |f''\varphi| < 0{,}1$ (I)

$f(x) = x^2 e^x \rightarrow f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2+2x) = f'(x)$

$f''(x) = e^x(x^2+2x) + e^x(2x+2) = e^x(x^2+4x+2) \xrightarrow{\text{es creciente}} f''(x)\text{ máx} = f''(2)$

(I) $\Rightarrow h^2 |f''\varphi| < 0{,}6 \xrightarrow{f''\varphi\text{ máx} = 103{,}446785} h^2 < \frac{0{,}6}{103{,}447854}$

$\rightarrow h^2 < 0{,}0058 \rightarrow h < 0{,}076158...$

$m \cdot h = 2 \rightarrow m = \frac{2}{h} \longrightarrow h < 0{,}076158 \longrightarrow m > 26{,}26$

con $m = 27 \rightarrow h = 0{,}07407...$

$m = 28 \rightarrow h = 0{,}0714...$

$m = 32 \rightarrow h = 0{,}0625 \rightarrow \boxed{m = 32}$

b) Indique (justificadamente) con cuál de los siguientes valores de h se puede resolver por trapecios pero no por Simpson:

$h = 0{,}16$; $h = 0{,}08$; $h = 0{,}05$

Para resolver por Simpson se necesita un número par de intervalos. Por lo tanto hallo el valor de n que corresponde a cada h dado y elijo el o los m impar/es.

$h = 0{,}16 \rightarrow m = \frac{2}{h} = \frac{2}{0{,}16} = 12{,}5 \rightarrow$ por ninguno de los 2 métodos

$h = 0{,}08 \rightarrow m = \frac{2}{h} = \frac{2}{0{,}08} = 25 \rightarrow$ Solo por trapecios

$h = 0{,}05 \rightarrow m = \frac{2}{h} = \frac{2}{0{,}05} = 40 \rightarrow$ Por los 2 métodos

$$\boxed{h = 0{,}08}$$

tema 47

23-11-18

④ Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -2x + 5y + z = 11 \\ 2x + 3y - 7z = -13 \\ 6x - y + 4z = 16 \end{cases}$$

Escriba la matriz del sistema e indique si es diagonal dominante. Si no lo es, permute filas. Indique las fórmulas iterativas a utilizar para resolverlo por Gauss-Seidel.

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$ No es matriz diagonal dominante $\xrightarrow{\text{Permuto filas}}$ $\begin{cases} 6x - y + 4z = 16 \\ -2x + 5y + z = 11 \\ 2x + 3y - 7z = -13 \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$ es diagonal dominante

$$\boxed{\begin{cases} x^k = \dfrac{16 + y^{k-1} - 4z^{k-1}}{6} \\ y^k = \dfrac{11 + 2x^k - z^{k-1}}{5} \\ z^k = \dfrac{13 + 2x^k + 3y^k}{7} \end{cases}}$$

⑤ Aproxime la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $[1,2]$ por una recta de mínimos cuadrados

$\int_1^2 1\,dx = 1 \qquad \int_1^2 x\,dx = 1{,}5 \qquad \int_1^2 x^2\,dx = 2{,}3\overline{3} \qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = 0{,}5 \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = 0{,}6931471806$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 2{,}3\overline{3} & 0{,}6931471806 \end{array}\right) \rightarrow a_0 = 1{,}523350749 \ ; \ a_1 = -0{,}6822338328$$

$$\boxed{y = 1{,}523350749 - 0{,}6822338328x}$$

⑥ Complete:

a) La fórmula: $w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4}{3}h\left[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})\right]$ corresponde a un método de:

...4... pasos pues necesito conocer 4 valores previos. Por ejemplo, para hallar w_5 necesito w_4, w_3, w_2 y w_1

y es una fórmula (Explícita / ~~Implícita~~) pues no necesito predecir el w_i actual (no hay w_{i+1} en la fórmula en ambos miembros)

b) Los métodos de Runge-Kutta son algoritmos de paso simple y tienen como principal ventaja lograr mayor precisión con menos cuentas